تمرين1

$$\begin{cases} f(x)=\left|\dfrac{x+1}{x}\right|^{x} & ;x\in\mathbb{R}^{*}-\{-1\} \\ f(0)=1 & \end{cases}$$

-1 نحدد D_f و نهايات f عند محدات D_f

$$D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\left|\frac{x+1}{x}\right|^{x}=\lim_{x\to-1} e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x+1}{x}\right|^{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e \qquad \left[t=\frac{1}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x+1}{x}\right|^{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e \qquad \left[t=\frac{1}{x}\right]$$

-2 ندرس اتصال و قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}^{*}-\{-1\}$

$\forall x\in\left]-1;0\right[\qquad f(x)=e^{x\ln\left(-\frac{x+1}{x}\right)}$ و $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[\qquad f(x)=e^{x\ln\frac{x+1}{x}}$

f متصلة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^{*}-\{-1\}$ (مركب دوال متصلة و قابلة للاشتقاق)

$$\forall x\in\mathbb{R}^{*}-\{-1\} \qquad f'(x)=\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$$

-3 ندرس اتصال و قابلية اشتقاق f في 0

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left|\frac{x+1}{x}\right|^{x}=\lim_{x\to0} e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}=\lim_{x\to0} e^{x\ln|x+1|-x\ln|x|}=1=f(0)$$

f متصل في 0

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}-1}{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}\right]\times\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=+\infty$$

$$car \quad \left[\lim_{x\to0} x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|=0\right]$$

f غير قابلة للاشتقاق في 0 و (C_f) يقبل مماس عمودي في 0النقطة التي أفصولها 0

-4 $$g(x)=-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

أ- نحدد D_g و نهايات g عند محدات D_g

$$D_g=\mathbb{R}^{*}-\{-1\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=0$$

$$\lim_{x\to-1^-} g(x) = \lim_{x\to-1^-}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=\lim_{x\to-1^-}\left[\frac{1}{x+1}\left(-1+(x+1)\ln(|x+1|)-(x+1)\ln|x|\right)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} g(x) = \lim_{x\to-1^+}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=\lim_{x\to-1^+}\left[\frac{1}{x+1}\left(-1+(x+1)\ln(|x+1|)-(x+1)\ln|x|\right)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]=+\infty$$

ب- ندرس تغيرات g

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\} \qquad g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	+	‖	-	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

ج- نستنتج أن $g(x)\succ 0$ $\quad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ و أنه $g(\alpha)=0$ $\quad \exists!\alpha\in]-1;0[$

من حلال جدول التغيرات يتضح أن $g(x)\succ 0$ $\quad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على $]-1;0[$ و $g(]-1;0[)=\mathbb{R}$

ومنه g تقابل من $]-1;0[$ نحو $\mathbb{R}$ ومنه $g(\alpha)=0$ $\quad \exists!\alpha\in]-1;0[$

5- ندرس تغيرات f

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\} \qquad f'(x)=\left[-\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}=g(x)e^{x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$

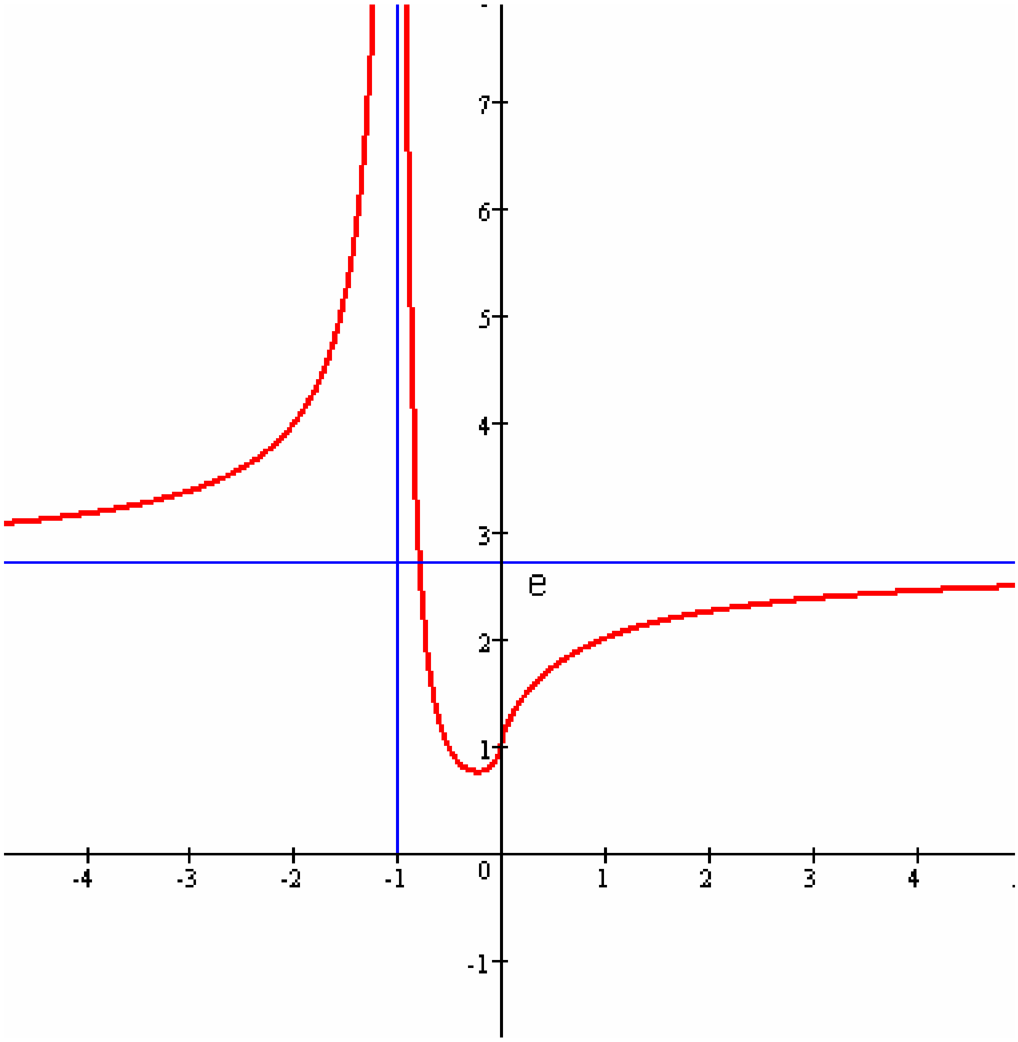
x	$-\infty$		-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		+	‖	-	0	+	‖	+	
$f(x)$	e	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	1	↗	e

6- ننشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$-0,3\prec\alpha\prec-0,2$ و $f(\alpha)\simeq 0,7$

(C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة التي أفصولها 0 و مماس أفقي عند α و مقاربان معادلتهما

$y=e$ و $x=-1$



تمرين2

نعتبر C صندوقا يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

1- نسحب خمس كرات بالتتابع و بإحلال من الصندوق C

احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء بالضبط هو $C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$

2- نعتبر قرصا مغشوشا أحد وجهيه يحمل الرقم 2 و الأخر يحمل الرقم 3 حيث

لدينا احتمال الحصول على وجه القرص يحمل الرقم 2 هو $\frac{1}{3}$

و احتمال الحصول على وجه القرص يحمل الرقم 3 هو $\frac{2}{3}$

" نرمي القرص على طاولة مستوية ثم نسحب من الصندوق C بالتتابع و بدون إحلال كرات عددها يساوي الرقم الذي ظهر على الوجه الأعلى للقرص"

احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط ضمن السحبة هو

$$\frac{1}{3}\frac{C_2^1\times A_3^1\times A_4^1}{A_7^2}+\frac{2}{3}\frac{C_3^1\times A_3^1\times A_4^2}{A_7^3}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{18}{35}=\frac{56}{105}$$

تمرين3

ليكن f تشاكل من الزمرة $(G;\times)$ نحو الزمرة $(G';T)$. لتكن H' زمرة جزئية من $(G';T)$.

نبين أن $f^{-1}(H')$ زمرة جزئية لزمرة $(G;\times)$

$$\left(f^{-1}(H')\right)=\{x\in G/f(x)=y\quad;\quad y\in H'\}$$

نعتبر $e_{G'}$ العنصر المحايد لـ $(G';T)$ و e_G العنصر المحايد لـ $(G;\times)$

لدينا $e_{G'} \in H'$ و $f(e_G) = e_{G'}$ ومنه $\left(f^{-1}(H')\right) \neq \varnothing$

ليكن $(x;x') \in \left(f^{-1}(H')\right)^2$

ومنه يوجد $(y;y')$ من H' حيث $f(x') = y'$; $f(x) = y$ $(x;x') \in G^2$

$x \times x'^{-1} \in G$ لأن $(G;\times)$ زمرة

و $f\left(x \times x'^{-1}\right) = f(x)Tf\left(x'^{-1}\right) = f(x)T\left(f(x')\right)^{-1} = yTy'^{-1}$ لأن f تشاكل

و لدينا $yTy'^{-1} \in H$ لأن $(H';T)$ زمرة

ومنه $x \times x'^{-1} \in \left(f^{-1}(H')\right)$ إذن $f^{-1}(H')$ زمرة جزئية لزمرة $(G;\times)$

تمرين4

نبرهن أنه إذا كان $a * a = e$ $\forall a \in G$ فان الزمرة $(G;*)$ تبادلية.56

ليكن $(x;y) \in G^2$

لدينا $(G;*)$ زمرة عنصرها المحايد e

$$x * y = (e * x) * (y * e) = (y * y * x) * (y * x * x) = y * \left[(y * x) * (y * x)\right] * x = y * e * x = y * x$$

e عنصر محايد و $a * a = e$ ↓ — التجميعية ↓ — التجميعية و $a * a = e$ ↓ — e عنصر محايد ↓

إذن $(G;*)$ زمرة تبادلية.