تمرين01

$$f(x)=Arc\sin(x)-Arc\cos(x)$$

1) نبين أن : $(\forall x\in[-1,1])\ Arc\sin(x)+Arc\cos(x)=\frac{\pi}{2}$

ليكن $x\in[-1;1]$

نضع $Arc\sin x=y$ ومنه $x=\sin y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ و $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا $0\le\frac{\pi}{2}-y\le\pi$ و بالتالي $\frac{\pi}{2}-y=Arccos\,x$ أي $\frac{\pi}{2}-Arc\sin x=Arccos\,x$

إذن $Arccos\,x+Arc\sin x=\frac{\pi}{2}$ $\quad(\forall x\in[-1,1])$

2) ا) نبين ان f تزايدية قطعا على $[-1,1]$

$f(x)=Arc\sin(x)-Arc\cos(x)$ $\quad(\forall x\in[-1,1])$ و $Arccos\,x=\frac{\pi}{2}-Arc\sin x$

إذن $f(x)=2Arc\sin(x)-\frac{\pi}{2}$

ليكن $(x;y)\in[-1;1]^2$ حيث $x\prec y$

وحيث أن دالة $Arc\sin$ تزايدة قطعا فان $Arc\sin x\prec Arc\sin y$

ومنه $2Arc\sin x-\frac{\pi}{2}\prec 2Arc\sin y-\frac{\pi}{2}$ أي $f(x)\prec f(y)$

إذن f تزايدية قطعا على $[-1,1]$

ب) نبين أن f تقابل من $[-1,1]$ نحو مجال J ينبغي تحديده ثم نحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

بما أن f تزايدية قطعا على $[-1,1]$ و f متصلة على $[-1,1]$ فان f تقابل من $[-1,1]$ نحو J

حيث $J=f([-1;1])=[f(-1);f(1)]=\left[\frac{-3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

ليكن $x\in[-1;1]$ و $y\in J$ $\qquad f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

$$f(x)=y\Leftrightarrow 2Arc\sin x-\frac{\pi}{2}=y$$

$$f(x)=y\Leftrightarrow Arc\sin x=\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}$$

واضح أن $\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x)=y\Leftrightarrow x=\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن $f^{-1}(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad\forall x\in J$

ج) نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$

$$f(x)=0\Leftrightarrow Arc\sin(x)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3)
$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

أ) نحدد مجموعة تعريف الدالة g.

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_g \Leftrightarrow x\in[-1;1] \quad et \quad f(x)\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x\in[-1;1] \quad et \quad x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

إذن $D_g=\left[-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$

ب) نحسب نهايات الدالة g عندما يؤول x إلى $\frac{\sqrt{2}}{2}$ على اليمين ثم على اليسار.

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} 2Arc\sin x-\frac{\pi}{2}=0^+$ ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} g(x)=+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^-} 2Arc\sin x-\frac{\pi}{2}=0^-$ ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^-} g(x)=-\infty$

ج) نبين أن g تقابل من $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ نحو مجال K ينبغي تحديده.

لدينا f تزايدية قطعا على $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ و لا تنعدم في هذا المجال

ومنه $\frac{1}{f}$ تناقصية قطعا على $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ أي g تناقصية قطعا على $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

و حيث أن g متصلة على $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ فان g تقابل من $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ نحو مجال K

حيث $K=\left[g(1);\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} g(x)\right[=\left[\frac{2}{\pi};+\infty\right[$

د) نبين أن : $(\forall x\in K)\ g^{-1}(x)=f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ثم نحسب $g^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من K.

ليكن $x\in K$ و $y\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ $\qquad g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=g(y)$

$$g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=\frac{1}{f(y)}$$
$$\Leftrightarrow f(y)=\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow y=f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

إذن $(\forall x\in K)\ g^{-1}(x)=f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

وحيث أن $f^{-1}(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ $\forall x\in J$ فان $(\forall x\in K)\ g^{-1}(x)=\sin\left(\frac{1}{2x}+\frac{\pi}{4}\right)$

تمرين02

نكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية :

ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ ،

$$a=-\cos\theta+i\sin\theta=[1;\pi-\theta] \quad ; \quad b=\cos\theta-i\sin\theta=[1;-\theta] \quad ; \quad c=-\cos\theta-i\sin\theta=[1;\pi+\theta]$$

$$a'=\sin\theta+i\cos\theta=\left[1;\frac{\pi}{2}-\theta\right] \quad ; \quad b'=\sin\theta-i\cos\theta=\left[1;-\frac{\pi}{2}+\theta\right] \quad ; \quad c'=-\sin\theta-i\cos\theta=\left[1;\frac{3\pi}{2}-\theta\right]$$

$$d=-\sin\theta+i\cos\theta=\left[1;\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

تمرين03

في المستوى العقدي نعتبر النقط : $A(1+i)$ و B بحيث : $OA=OB$ و $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) نعطي الشكل الجبري ل z_B.

$$|z_B|=OB=OA=|1+i|=\sqrt{2}$$

$$\arg(z_B)\equiv\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OB})}\equiv\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OA})}+\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}\equiv\arg(1+i)+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

ومنه $z_B=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4} \quad ; \quad \sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

إذن $z_B=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) نحسب المسافة AB .

$$AB=\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}==\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

3) نحدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB})}$

$$\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\equiv\arg(z_B-z_A)\equiv\arg\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1-i\right)\equiv\arg\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\equiv\arg\left(\sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)+i\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\right]\right)\arg\left(\sqrt{2}\left[-\sin\frac{7\pi}{12}-i\cos\frac{7\pi}{12}\right]\right) \quad [2\pi]$$

$$\overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB})}\equiv\arg\left(\left[\sqrt{2};\frac{3\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right]\right)\equiv\arg\left(\left[\sqrt{2};\frac{13\pi}{12}\right]\right)\equiv\frac{13\pi}{12}\equiv-\frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي لـ $\widehat{(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB})}$ هو $-\frac{11\pi}{12}$

تمرين04

(Γ) هي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|z-1|=|z|$

1) بدون أي حساب نحدد طبيعة المجموعة (Γ).

$$|z-1|=|z|\Leftrightarrow IM=OM$$

إذن المجموعة (Γ) هي واسط القطعة $[O;I]$ حيث $I(1)$

2) نعطي معادلة ديكارتية ل (Γ).

(Γ) مستقيم مار من $E\left(\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{e}_1$ منظمية عليه إذن $x=\frac{1}{2}$ معادلة ديكارتية لـ (Γ)

تمرين05

1) نبين أن : $(\forall (X,Y)\in \mathbb{R}_+^2)\quad \sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{Y}=\dfrac{X-Y}{\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}}$

ليكن $(X;Y)\in \mathbb{R}_+^2$ حيث $\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}\neq 0$

تذكير $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{Y}=\frac{\left(\sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{Y}\right)\left(\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}\right)}{\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}}=\frac{X-Y}{\sqrt[3]{X^2}+\sqrt[3]{XY}+\sqrt[3]{Y^2}}$$

2) نحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}-1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=-\infty$$