التمرين1

I -
$$\begin{cases} f(x) = x+2-\sqrt{x^2+2x} & x \prec -2 \\ f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & x \geq -2 \end{cases}$$

1- ندرس اشتقاق f على يمين و يسار 2- و نؤول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\arctan\sqrt{x+2}}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\arctan\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين2- و تقبل نصف مماس عمودي علي يمين 2-

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+2-\sqrt{x^2+2x}}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} 1-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} 1-\frac{x}{\sqrt{x(x+2)}} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يسار 2- و تقبل نصف مماس عمودي علي يسار 2-

2- نحدد الدالة المشتقة للدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

$$\forall x \in]-\infty;-2[\quad f'(x) = 1-\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\forall x \in]-2;+\infty[\quad f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x+2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$$

II- g قصور f على $[0;2]$ و
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- أ) نبين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

لدينا $x \to x$ و $x \to \arctan x$ متصلتان على $\mathbb{R}^+$ و قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$(x)' = x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

لدينا $\frac{1}{1+x^2} \prec 1 \quad \forall x \in]0;+\infty[$ أي $(\arctan x)' \prec (x)' \quad \forall x \in]0;+\infty[$

و $\arctan 0 = 0$

إذن $\arctan x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب) نبين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $0 \leq u_0 \leq 2$ لان $u_0 = 2$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 2$ ونبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \succ 0 \quad \forall x \in [0;2]$ ومنه g تزايدية على $[0;2]$

وحيث أن $0 \leq u_n \leq 2$ فان $g(0) \leq g(u_n) \leq g(2)$ أي $g(0) \leq u_{n+1} \leq g(2)$

لدينا $g(2) = \arctan 2 \leq 2 \quad ; \quad g(0) = \arctan\sqrt{2} \geq 0$

ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ إذن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) نبين أن (u_n) متقاربة

لندرس رتابة (u_n)

لدينا $u_1 = g(u_0) = g(2) = \arctan 2$ ومنه $u_1 \le u_0$

نفترض أن $u_{n+1} \le u_n$ نبين أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$

لينا $u_{n+1} \le u_n$

و حيث أن g تزايدية على $[0;2]$ فان $g(u_{n+1}) \le g(u_n)$ أي أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$

إذن $u_{n+1} \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه (u_n) تناقصية و بما أن (u_n) مصغورة بالعدد 0 فان (u_n) متقاربة

-2 أ) نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

نعتبر الدالة h حيث $h(x) = g(x) - x$

h متصلة على $[0;2]$ قابلة للاشتقاق على $]0;2[$

و $h(0) \times h(2) = \left(\arctan\sqrt{2}\right)(-2 + \arctan 2) \prec 0$

ومنه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا في $]0;2[$

لدينا $$h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}\,(3+x)} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+1}\,(x+3)}{2\sqrt{x+2}\,(3+x)}$$

وحيث $1 - 2\sqrt{x+1}\,(x+3) \prec 0 \quad \forall x \in]0;2[$ فان h تناقصية قطعا على $]0;2[$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;2[$

ب) نثبت أن $g'(x) \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x \in]0;2[$

ليكن $x \in]0;2[$ لدينا $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}\,(3+x)}$

بما أن $0 \prec x \prec 2$ فان $3 \prec x+3 \prec 5$ و $2\sqrt{2} \prec 2\sqrt{x+2} \prec 4$

و بالتالي $6\sqrt{2} \prec 2(x+3)\sqrt{x+2} \prec 20$ ومنه $\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}\,(3+x)} \prec \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

إذن $\forall x \in]0;2[\quad g'(x) \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) نبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

g متصلة على $[0;2]$ و قابلة للاشتقاق على $]0;2[$ و $\alpha \in]0;2[$ و $u_n \in [0;2] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه يوجد c من $]0;2[$ حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و بالتالي $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)||u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و حيث $|g'(c)| \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$ فان $|g(u_n) - g(\alpha)| \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا

$$|u_1-\alpha| \le \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha| \le \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_1-\alpha|$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$|u_n-\alpha| \le \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على

$$|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n |u_0-\alpha|$$

و حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n = 0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

التمرين2

ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $(x-2n)(y-2n)=2n^2$ $\quad (x;y)\in\mathbb{Z}^2$

ليكن $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$

1- نبين أن $\delta^2/2n^2$

* لدينا $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$ ومنه $\delta/(x-2n)$ و $\delta/(y-2n)$

وبالتالي $\delta^2/(x-2n)(y-2n)$ إذن $\delta^2/2n^2$

نبين أن $\delta/(x\wedge y)$

لدينا $\delta^2/2n^2$ و منه $\delta/2n$

و حيث $\delta/(x-2n)$ و $\delta/(y-2n)$ فان δ/x و δ/y إذن $\delta/(x\wedge y)$

2- نبين أن $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$

$$\begin{aligned}(x+y-2n)^2 &= x^2+y^2+2xy-4nx-4ny+4n^2\\ &= x^2+y^2+2\left(xy-2nx-2ny+2n^2\right)\\ &= x^2+y^2+2\left((x-2n)(y-2n)-2n^2\right)\\ &= x^2+y^2 \qquad car \quad (x-2n)(y-2n)-2n^2=0\end{aligned}$$

نستنتج أن $(x\wedge y)/\delta$

لدينا $(x\wedge y)^2/x^2$ و $(x\wedge y)^2/y^2$ ومنه $(x\wedge y)^2/\left(x^2+y^2\right)$

و بالتالي $(x\wedge y)^2/(x+y-2n)^2$ ومنه $(x\wedge y)/(x+y-2n)$

و حيث $(x\wedge y)/x$ و $(x\wedge y)/y$ فان $(x\wedge y)/(x-2n)$ و $(x\wedge y)/(y-2n)$

إذن $(x\wedge y)/[(x-2n)\wedge(y-2n)]$ أي $(x\wedge y)/\delta$

3- نبين أن $(x\wedge y)/n$

لدينا $\delta/2n$ ومنه $2n=k\delta$ $\quad \exists k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي $4n^2=k^2\delta^2$

لينا $\delta^2/2n^2$ ومنه $2n^2=k'\delta^2$ $\quad \exists k'\in\mathbb{Z}$ أي $4n^2=2k'\delta^2$

ومنه $k^2=2k'$ ومنه k زوجي أي $k=2m \quad \exists m\in\mathbb{Z}$
و حيث $2n=k\delta$ فان $2n=2m\delta$ أي $n=m\delta$ إذن δ/n
و بما أن $(x\wedge y)/\delta$ فان $(x\wedge y)/n$

التمرين3

نحل في $\mathbb{N}^2$ النظمة $\begin{cases} a\wedge b=9 \\ a\vee b=774 \end{cases}$

$$\begin{cases} a\wedge b=9 \\ a\vee b=774 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\wedge b=3^2 \\ a\vee b=2\times 3^2\times 43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=2\times 3^4\times 43 \\ a\wedge b=3^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'b'=2\times 43 \\ a'\wedge b'=1 \end{cases} \quad / a=3^2a' \;;\; b=3^2b'$$

ومنه $(a';b')=(1;2\times 43)$ أو $(a';b')=(2\times 43;1)$ أو $(a';b')=(2;43)$ أو $(a';b')=(43;2)$
إذن $(a;b)=(9;18\times 43)$ أو $(a;b)=(18\times 43;9)$ أو $(a;b)=(18;9\times 43)$ أو $(a;b)=(9\times 43;18)$

التمرين4

a و b عددين معلومين من $\mathbb{N}^*$. $\qquad A=\left\{n\in\mathbb{N}^* / \quad b/an\right\}$

-1 نتأكد $A\neq\varnothing$
$b\in A$ ومنه $A\neq\varnothing$

-2 نبرهن أن n_0/b
n_0 أصغر عنصر في A و $b\in A$ ومنه $n_0\leq b$ و b/an_0
نفترض أن n_0 لا يقسم b ومنه $\quad b=qn_0+r \quad /0\prec r\prec n_0 \qquad \exists(q;r)\in\mathbb{N}^2$
لدينا b/an_0 ومنه $an_0=kb \quad \exists k\in\mathbb{N}$
$b=qn_0+r\Leftrightarrow ab-qan_0=ar$
ومنه $ab-qb=ar$ أي $(a-q)b=ar$
إذن b/ar ومنه $r\in A$ وحيث $r\prec n_0$ فهذا يتناقض مع كون n_0 أصغر عنصر في A
إذن n_0/b