تمرين1

-I $g(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

1- ندرس تغيرات الدالة g

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad g'(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}=\frac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad g'(x)\prec 0$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	-
g	$+\infty$ $\searrow$ 0

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}-x+\sqrt{x^2+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}=0$$

2- نبين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا ينبغي تحديده

$$g(x)=x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+8}=2x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{8}{3}\\ x\succ 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

II - $f(x)=\arcsin(g(x))$

1- نحدد D_f حيز تعريف الدالة f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_f\Leftrightarrow -1\le -x+\sqrt{x^2+8}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 0\prec -x+\sqrt{x^2+8}\le 1\quad \text{car } \forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)\succ 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+8}\le 1+x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\succ -1\\ 2x-7\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\ge\frac{7}{2}$$

$$D_f=\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$$

2- نحسب $\lim_{x\to\frac{7}{2}^+}\dfrac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{7}{2}}$ و نؤول النتيجة هندسيا

$$\arcsin\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha=-x+\sqrt{x^2+8}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha+x=\sqrt{x^2+8}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{8-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$\lim_{x\to\frac{7}{2}^+}\alpha=\frac{\pi}{2}^-$$

$$\lim_{x\to\frac{7}{2}^+}\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{7}{2}}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}}{\frac{8-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha}-\frac{7}{2}}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)2\sin\alpha}{8-\sin^2\alpha-7\sin\alpha}$$

نضع $t=\alpha-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{7}{2}^+}\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{7}{2}}=\lim_{t\to0^-}\frac{t2\cos t}{8-\cos^2 t-7\cos t}=\lim_{t\to0^-}\frac{2\cos t}{\frac{1-\cos^2 t}{t^2}t-7\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)}=-\infty$$

إذن C_f يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول $\frac{7}{2}$

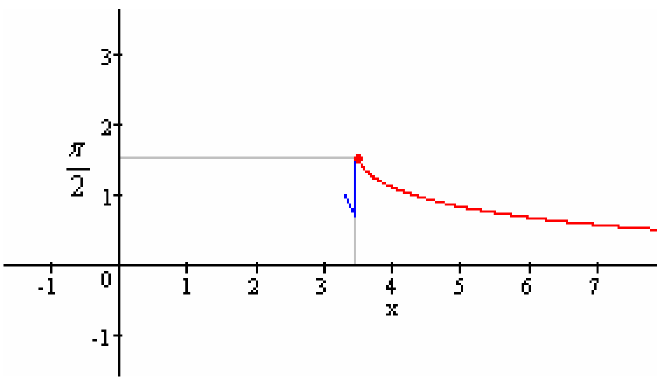
3- جدول تغيرات الدالة f

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}=\frac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}\sqrt{1-\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)^2}}$$

x	$\frac{7}{2}$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
f	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$ 0

4- نحدد الفرع اللانهائي للمنحنى C_f و ننشئ C_f

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ومنه C_f يقبل محور الافاصيل كمقارب بجوار $+\infty$



5- نبين أن f تقابل من D_f نحو مجال I ينبغي تحديده ثم نحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I

f متصلة و تناقصية قطعا على $\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$ و $f\left(\left[\frac{7}{2};+\infty\right[\right)=\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

اذن f تقابل من $\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$ نحو $I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

ليكن $y\in\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$$
$$\Leftrightarrow \arcsin(\quad)=x$$
$$\Leftrightarrow -y+\sqrt{y^2+8}=\sin x$$
$$\Leftrightarrow y^2+8=(\sin x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{8-\sin^2 x}{2\sin x}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{8-\sin^2 x}{2\sin x}\qquad \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$$

تمرين2

1- ليكن $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ حيث $(a+b)\wedge ab=p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي

أ- نبين أن p^2/a^2 و نستنتج أن p/a و p/b

$(a+b)\wedge ab=p^2$ ومنه p^2/ab و $p^2/a+b$

وبالتالي $p^2/ab+b^2$ و p^2/a^2+ab اذن p^2/a^2 و p^2/b^2

ومنه p/a و p/b

ب- بين أن $a\wedge b=p$ أو $a\wedge b=p^2$

ليكن $a\wedge b=d$ ومنه d/a و d/b

و بالتالي d/ab و $d/a+b$ اذن $d/(a+b)\wedge ab$ أي d/p^2

ومنه $d\in\{1;p;p^2\}$

لنفرض أن $d=1$

$d=1\Rightarrow a\wedge b=1\Rightarrow(a+b)\wedge ab=1\Rightarrow p=1$ وهذا غير صحيح لأن p أولي

إذن $d=p$ أو $d=p^2$

2- نعتبر في $\mathbb{N}^2$ النظمة $(S):\ \begin{cases}(a+b)\wedge ab=49\\ a\vee b=231\end{cases}$

أ- نبين أن $a\wedge b=7$

$(a+b)\wedge ab=49=7^2$ ومنه $a\wedge b=7$ أو $a\wedge b=49$

نعلم أن $a\wedge b/a\vee b$ وحيث $a\vee b=231$ و 49 لاتقسم 231 و $7/231$ فان $a\wedge b=7$

ب حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة (S)

$$(S):\begin{cases}(a+b)\wedge ab=49\\ a\vee b=231\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\wedge b=7\\ a\vee b=231\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=7^2\times 3\times 11\\ a\wedge b=7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a'b'=3\times 11\\ a'\wedge b'=1\end{cases}/a=7a'\quad;\quad b=7b'$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a'=3\\ b'=11\end{cases}\quad ou\quad\begin{cases}a'=11\\ b'=3\end{cases}/a=7a'\quad;\quad b=7b'$$

إذن $S=\{(21;77);(77;21)\}$

تمرين3

نبين أن: $\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^{*2}\quad a=\alpha^2\quad et\quad b=\beta^2$

$(a;b;c)\in\mathbb{N}^{*3}$ بحيث $a\wedge b=1\quad;\quad ab=c^2$

نضع $a\wedge c=d$ ومنه $c=\beta d\qquad\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^{*2}/a=\alpha d$ حيث $\alpha\wedge\beta=1$

لدينا $ab=c^2$ ومنه $\alpha db=d^2\beta^2$ أي $\alpha b=d\beta^2$ ومنه $\beta^2/\alpha b$

و حيث $\alpha\wedge\beta=1$ فان $\alpha\wedge\beta^2=1$ إذن حسب كوص β^2/b

لدينا $\alpha b=d\beta^2$ ومنه $b/d\beta^2$

$d\wedge b=(a\wedge b)\wedge c=1$ ومنه b/β^2 إذن $b=\beta^2$

باعتبار $b\wedge c=d'$ ومن $c=\alpha d'\qquad\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{N}^{*2}/b=\beta d'$ حيث $\alpha\wedge\beta=1$

بنفس الطريقة نحصل على أن α^2/a و a/α^2

إذن $a=\alpha^2$

تمرين4

في مستوى منسوب الى معلم متعلمد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقطتين $I(1,0)$ و $J(0;1)$.

لتكن (Γ) مجموعة النقط M حيث $MI+MJ=3$ و Ω منتصف $[IJ]$

1- نحدد معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$

نضع $\vec{u}=\dfrac{1}{\Omega I}\overrightarrow{\Omega I}$ و لتكن $\vec{v}$ متجهة حيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و $\|\vec{v}\|=1$

Ω منتصف $[IJ]$ ومنه $\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ و $\Omega I=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي $\sqrt{2}\vec{u}=\overrightarrow{\Omega I}$

أي $I(\sqrt{2};0)$ في المعلم $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ و بما أن Ω منتصف $[IJ]$ فان $J(-\sqrt{2};0)$

لتكن $M(x;y)$ في المعلم $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$

$$MI+MJ=3 \Leftrightarrow MI^2+MJ^2+2MI.MJ=9$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+2\right)+2\sqrt{\left(x^2+y^2+2\right)^2-8x^2}=9$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x^2+y^2+2\right)^2-8x^2}=9-2\left(x^2+y^2+2\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2-8x^2}=9-2t \quad / \text{ t}=x^2+y^2+2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-2t\geq 0 \\ 4\left(t^2-8x^2\right)=81-36t+4t^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-2t\geq 0 \\ -32x^2-81+36t=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\leq \frac{5}{4} \\ 4x^2+36y^2=9 \end{cases} \quad / \text{ t}=x^2+y^2+2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\leq \frac{5}{2} \\ \left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{9}}\right)^2=1 \end{cases}$$

$$4x^2+36y^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x^2\leq \frac{9}{4} \\ y^2\leq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2\leq \frac{5}{2}$$

معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ هي $\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{9}}\right)^2=1$

2- ننشئ المجموعة (Γ)

في المعلم $(\Omega;\vec{u};\vec{v})$ لدينا $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ و $B\left(-\frac{3}{2};0\right)$ و $C\left(0;\frac{1}{2}\right)$ و $D\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ رؤوس الاهليج (Γ)