الإمتحان الوطني الموحد للبكالوريا

مادة : الرياضيات

شعبة : العلوم الرياضية

الدورة العادية : يونيو 2006

إنجاز : محمد أيت الحسين

أستاذ بثانوية مولاي رشيد : فاس

التمرين الأول

الجزء الأول :

1) لدينا لكل $(a,a',b,b')\in\mathbb{R}^4$ بحيث $b\neq 0$ و $b'\neq 0$:

$$M_{(a,b)}\times M_{(a',b')}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\a'&b'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\a+ba'&bb'\end{pmatrix}=M_{(a+ba',bb')}$$

بما أن : $bb'\neq 0$ فإن : $M_{(a+ba',bb')}\in G$ ومنه : G مستقرة في $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2) المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ تحقق : $I=M_{(0,1)}$. إذن I هو العنصر المحايد ل $(G,\times)$.

ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث $b\neq 0$. لدينا : $\det\left(M_{(a,b)}\right)=b\neq 0$

إذن : $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $\left(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ وهو :

$$\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}=\frac{1}{b}\begin{pmatrix}b&0\\-a&1\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن : $\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}=M_{\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)}\in G$

$\times$ تجميعي في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ إذن في G بالأحرى.

من كل ما سبق نستنتج أن : $(G,\times)$ زمرة.

حسب ما سبق أعلاه لدينا لكل $(a,a',b)\in\mathbb{R}^3$ بحيث $b\neq 0$:

$M_{(a,b)}\times M_{(a',b)}=M_{(a',b)}\times M_{(a,b)}$ إذا وفقط إذا :

$a+ba'=a'+ba$ إذا وفقط إذا :

$(a-a')(1-b)=0$ أي : $b=1$ أو $a=a'$.

يكفي إذن أن نختار $(a,a',b)\in\mathbb{R}^3$ بحيث :

$b\neq 1$ و $a\neq a'$ لكي تكون :

$$M_{(a,b)}\times M_{(a',b)}\neq M_{(a',b)}\times M_{(a,b)}$$

مثلا : $(a,a',b)=(0,1,-1)$ نجد :

$$M_{(0,-1)}\times M_{(1,-1)}=M_{(-1,-1)}$$

و $M_{(1,-1)} \times M_{(0,-1)} = M_{(1,-1)}$

إذن الزمرة $(G,\times)$ ليست تبادلية.

3) $H \subset G$ و $H \neq \varnothing$ لأن : $M_{(0,1)} \in H$.

لكل $(b,b') \in \mathbb{R}^2$ لدينا :

$$(b>0 \text{ و } b'>0) \Rightarrow bb'>0$$

إذن H مستقرة قي $(G,\times)$.

و لدينا لكل عدد حقيقي b : $b>0 \Rightarrow \dfrac{1}{b}>0$

إذن :

$$M_{(a,b)} \in H \Rightarrow (M_{(a,b)})^{-1} = M_{\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)} \in H$$

إذن H مستقرة بالمقلوب. ومنه H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

4) لدينا : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$

لنبين بالترجع أن : $P(n):\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

لدينا $P(1)$ صحيحة .

نفترض أن $P(n)$. إذن :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

<u>الجزء الثاني :</u>

1) φ معرف لأن :

$$(\forall (a,a',b,b') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2})\ M_{(a,b)} = M_{(a',b')} \Rightarrow (a,b) = (a',b')$$

φ شمولي لأن : (a,b) يقبل $M_{(a,b)}$ سابقا له.

φ تبايني لأن :

$$\varphi(M_{(a,b)}) = \varphi(M_{(a',b')}) \Rightarrow (a,b) = (a'b')$$

$$\Rightarrow M_{(a,b)} = M_{(a',b')}$$

إذن φ تقابل .

φ تشاكل لأن : لكل $(a,a',b,b') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}$

$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(a',b')}\right) = \varphi\left(M_{(a+ba',bb')}\right)$$

$$= (a+ba',bb') = (a,b)T(a',b')$$

$$= \left(\varphi\left(M_{(a,b)}\right)\right)T\left(\varphi\left(M_{(a',b')}\right)\right)$$

2) $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$ زمرة غير تبادلية لأنها صورة زمرة غير تبادلية بتشاكل تقابلي.

ملاحظة : العنصر المحايد لهذه الزمرة هو : $(0,1)=\varphi\left(M_{(0,1)}\right)$

ومماثل (a,b) هو :

$$(a,b)'=\left(\varphi\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}\right)=\varphi\left(M_{\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)}\right)=\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)$$

3)

$$((a,1)T\dots T(a,1))'=\left(\varphi\left(M_{(a,1)}\right)T\dots T\varphi\left(M_{(a,1)}\right)\right)'$$

$$=\left(\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)\times\dots\times\left(M_{(a,1)}\right)\right)\right)'=\left(\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)^n\right)\right)'$$

$$=\left(\varphi\left(M_{(na,1)}\right)\right)'=\varphi\left(\left(M_{(na,1)}\right)^{-1}\right)$$

$$=\varphi\left(M_{(-na,1)}\right)=(-na,1)$$

ملخص : $\boxed{((a,1)T\dots T(a,1))'=(-na,1)}$

التمرين الثاني :

1) أ) بالتعويض المباشر نجد :

$$a^2d^2(ad+bd)=b^2d^2(ad-bd)^2$$

وبما أن : $d\neq 0$ فإن :

$$\boxed{a^2(a+b)=b^2d(a-b)^2}$$

(اختزلنا ب d^3).

ب) لدينا حسب أ) : $b|(a+b)a^2$ و بما أن : $d=x\wedge y$ فإن :

$a\wedge b=1$ ومنه أيضا : $a^2\wedge b=1$ ومنه حسب مبرهنة كوص :

$b|(a+b)$. إذن $b|(a+b)-b=a$

أي : $a\wedge b=b$ ومنه : $\boxed{b=1}$

ج) تصبح المتساوية أعلاه في أ) :

$$d(a-1)^2=(a+1)a^2$$

ومنه : $a=1\Rightarrow(a=-1$ أو $a=0)$

هذا يعني بالخصوص أن العبارة $a=1$ خاطئة.

إذن : $\boxed{a\neq 1}$

لدينا إذن : $(a-1)|(a+1)a^2$

ونعلم أن : $(a-1)\wedge a=1$) حسب متطابقة بوزو والعلاقة :

$a-(a-1)=1$) إذن كما سبق : $(a-1)\wedge a^2=1$ ومنه حسب

مبرهنة كوص :

$$\boxed{(a-1)\mid(a+1)}$$

د) لدينا :

$$\begin{cases}(a-1)|(a+1)\\(a-1)|(a-1)\end{cases}\Rightarrow(a-1)|((a+1)-(a-1))$$

ومنه : $(a-1)|2$.

وبما أن $a-1>0$ فإن : $a-1\in\{1,2\}$

أي : $\boxed{a=2 \text{ أو } a=3}$

2) لدينا حسب ما سبق : إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) فإنه يوجد $d\in\mathbb{N}^*$ بحيث :

$$\begin{cases}x=da\\y=d\\a\in\{2,3\}\\d(a-1)^2=(a+1)a^2\end{cases}$$

إذا كان $a=2$ فإن : $d=12$

إذا كان $a=3$ فإن : $d=9$.

ومنه : $(x,y)\in\{(24,2),(27,9)\}$

بإنجاز الحساب تحققنا من كون الزوجين أعلاه حلين للمعادلة ومنه مجموعة الحلول :

$$\boxed{S=\{(24,2),(27,9)\}}$$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

1) نضع : $z=x+yi$ بحيث : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.لدينا :

$$\begin{aligned}M(z)\in(H)&\Leftrightarrow Re(P(z))=0\\&\Leftrightarrow Re(x^2-y^2+2ixy-(2+6i)(x+yi))=0\\&\Leftrightarrow Re((x^2-y^2-2x+6y)+i(2xy-6x-2y))=0\\&\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+6y=0\end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{x^2-y^2-2x+6y=0}$ معادلة ديكارتية ل (H) .

2) لدينا :

$$x^2-y^2-2x+6y=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(y-3)^2=-8$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}=-1$$

بحيث : $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-3 \end{cases}$

ومنه (H) هذلول مركزه هو : $\Omega(1,3)$ و :

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}=-1$$

معادلة له في المعلم : $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

الرأسان : لدينا : $a=b=\sqrt{8}$ ومنه الرأسان : $A\left(0,\sqrt{8}\right)$ و $A'\left(0,-\sqrt{8}\right)$ في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ أي : $A\left(1,3+\sqrt{8}\right)$ و $A'\left(3,3-\sqrt{8}\right)$ في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

المقاربان : معادلتا المقاربين في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$:

$$(D):\ Y=X \quad \text{و} \quad (D'):\ Y=-X$$

ومنه معادلتيهما في المعلم $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$:

$$(D):\ y-3=x-1 \quad \text{و} \quad (D'):\ y-3=1-x$$

أي : $\boxed{(D):y=x+2 \quad \text{و} \quad (D'):\ y-3=-x+4}$

ملحوظة : لم تطلب العناصر المميزة لكن نعطيها إتماما للفائدة :

لدينا : $a=b=\sqrt{8}$ ومنه : $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$

ومنه التباعد المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

البؤرة : $F(0,4)$. الدليل المرتبط بها : $(\Delta):Y=\frac{a^2}{c}=2$

البؤرة : $F(0,-4)$. الدليل المرتبط بها : $(\Delta):Y=-\frac{a^2}{c}=-2$

في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

4) الإنشاء : انظر الشكل أسفله.

<u>الجزء الثاني :</u>

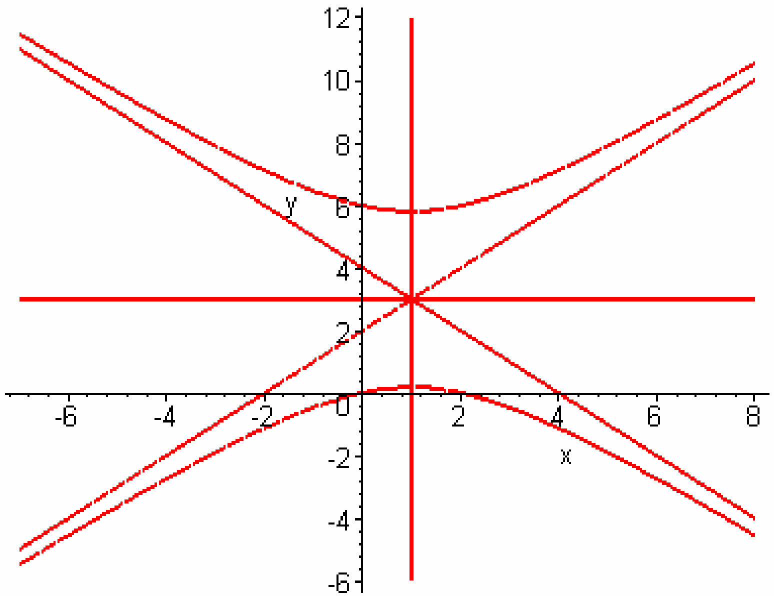
1) المعادلة : $P(z)=4-6i$ تكافئ :

$$z^2-(2+6i)z-4+6i=0$$

مميزها المختصر هو : $\Delta'=(1+3i)^2+4-6i=-4=(2i)^2$.

ومنه جذراها : $z_1=1+3i-2i=1+i$ و

$$z_2=1+3i+2i=1+5i$$



ومنه مجموعة حلولها : $\boxed{S=\{1+i,1+5i\}}$

2) أ) لدينا باستعمال صيغة حدانية نيوتن : $u^4=476-480i$

ومنه : $u^4v=956-4i=4(239-i)$. إذن :

$$\boxed{u^4v=4w \qquad (1)}$$

ب) لدينا : $\tan(\arg(u))=5$ و $\sin(\arg(u))=\frac{5}{26}>0$

ومنه : $\arg(u)\equiv \mathrm{Arc}\tan(5)\equiv\frac{\pi}{2}-\alpha \quad [2\pi]$

بالمثل : $\tan(\arg(w))=-\frac{1}{239}$ و

$\sin(\arg(w))=-\frac{1}{169\sqrt{2}}<0$ إذن :

$$\arg(w)\equiv-\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{1}{239}\right) \quad [2\pi]$$

ملخص : $\boxed{\arg(u)\equiv\frac{\pi}{2}-\alpha \quad [2\pi] \quad \arg(w)\equiv-\beta \quad [2\pi]}$

ج) من العلاقة (1) أعلاه نستنتج أن :

$$\arg(u^4v)\equiv\arg(4w) \quad [2\pi]$$

ومنه : $2\pi-4\alpha+\frac{\pi}{4}\equiv-\beta \quad [2\pi]$. إذن :

$$\boxed{4\alpha-\beta\equiv\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \qquad (2)}$$

من جهة أخرى :

$$0<\frac{1}{5}<1\Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0<4\alpha<\pi$$

و $0<\frac{1}{239}<1\Leftrightarrow 0<\beta<\frac{\pi}{4}$

ومنه : $-\frac{\pi}{4}<4\alpha-\beta<\pi$

ومن (2) أعلاه نستنتج أن : $(\exists k\in\mathbb{Z})\ \ 4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

ومن المتفاوتة المزدوجة أعلاه نحصل على :

$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+k2\pi<\pi$ أي : $-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4}$ ومنه : $k=0$

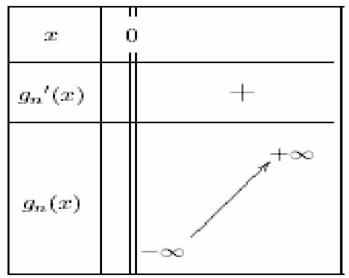
إذن : $4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ ومنه :

$$\boxed{4\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}}$$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

1) لدينا : $(\forall x>0)\ g_n'(x)=n+\frac{2}{x}>0$ ومنه الدالة g_n تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها



2) لندرس تغيرات الدالة : $x\mapsto u(x)=\sqrt{x}-\ln x$. لدينا :

$$(\forall x>0)\ u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-2\right)$$

و منه : $u'(x)>0\Leftrightarrow x>4$ و $u'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

وهذا يعني بالخصوص أن $u(4)$ قيمة دنيا مطلقة للدالة u.

إذن : $(\forall x>0)\ u(x)\geq u(4)=2-\ln 4=2(1-\ln 2)>0$

لأن : $1-\ln(2)=\ln(e)-\ln(2)$ و $e>2$ و $\ln$ تزايدية قطعا.

إذن : $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ \ \sqrt{x}-\ln x>0}$

3) أ) الدالة g_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I=]0,+\infty[$

إذن g_n تقابل من I نحو $g_n(I)$.لدينا حسب السؤال 1) :

$$g_n(I)=\mathbb{R}$$

بالخصوص 0 يقبل سابقا وحيدا α_n ب g_n في I.

لدينا : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}-\ln(n)>0$ حسب السؤال 2)

و : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1-2\ln(n)<0$ لأن : $n\geq 3$. هذا يعني أن :

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right)<g_n(\alpha_n)<g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

وبما أن g_n تزايدية قطعا فإن : $\boxed{\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}}$

ب) لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ ومنه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0}$

الجزء الثاني :

(I) 1) لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\, e^{-x} = +\infty$

ومنه الدالة f لا تقبل الإشتقاق في 0 على اليمين و منحناها يقبل

$\boxed{\text{نصف مماس موازي لمحور الأراتيب في النقطة O أصل المعلم}}$.

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0}$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

ومنه $\boxed{\text{(C) يقبل محور الأفاصيل مقاربا له بجوار } +\infty.}$

3) أ) لدينا لكل $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x} = \left(\frac{1}{3}x^{-1} - 1\right)x^{\frac{1}{3}}e^{-x} = \frac{1-3x}{3x}f(x)$$

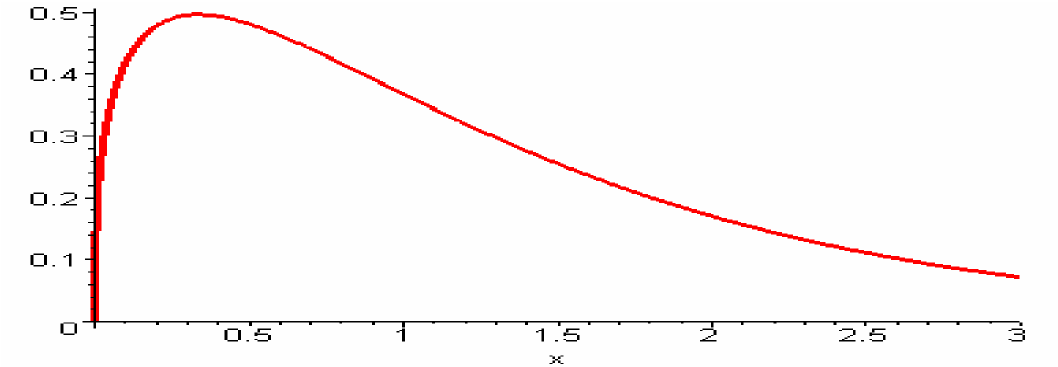
إذن : $\boxed{(\forall x > 0)\ f'(x) = \frac{1-3x}{3x}f(x)}$

ب) حسب ما سبق فإن إشارة f' هي إشارة : $x \mapsto -3x+1$ ومنه

جدول التغيرات للدالة f :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{1}{3})$	$\searrow$	0

4) منحنى الدالة f :



$$I=\left[\frac{1}{3},1\right] \quad (II)$$

1) أ) حسب الدراسة المنجزة أعلاه فإن f متصلة وتناقصية قطعا

على I ومنه : $f(I)=\left[f(1),f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

لدينا : $f\left(\frac{1}{3}\right)<0,5<1$ و $f(1)=\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$ إذن :

$$\frac{1}{3}<f(1)<f\left(\frac{1}{3}\right)<1$$

ومنه : $\boxed{f(I)\subset I}$

ب) لدينا : $(\forall x\in I)\ \ f'(x)=v(x)f(x)$ بحيث $v(x)=\frac{1-3x}{3x}$

و هي دالة متخاطة تناقصية قطعا على I (لأن : المحددة :

$\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3<0$) ومنه : $v(I)=\left[v(1),v\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\left[-\frac{2}{3},0\right]$

بالخصوص : $(\forall x\in I)\ \ |v(x)|\leq\frac{2}{3}$ وبما أن :

$$(\forall x\in I)\ \ |f(x)|\leq 1$$

فإن : $(\forall x\in I)\ \ |f'(x)|=|v(x)|\,|f(x)|\leq\frac{2}{3}$

ملخص : $\boxed{(\forall x\in I)\ \ |f'(x)|\leq\frac{2}{3}}$

ج) لدينا

$$\begin{cases}x>0\\ f(x)=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \frac{1}{3}\ln(x)-x=\ln(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln(x)-3x=3\ln(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ g_3(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\alpha_3$$

2) أ) بالترجع : $u_0=\frac{1}{3}\in I$: واضح .

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in I\Rightarrow u_{n+1}=f(u_n)\in f(I)\subset I\Rightarrow u_{n+1}\in I$$

ومنه : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in I}$

ب) حسب السؤال 1) ج) فإن : $f(\alpha_3)=\alpha_3$. وحسب السؤال 3) أ)

فإن : $\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha_3<\frac{1}{3}$ ومنه : $\alpha_3\in I$.

لكل $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha_3|=|f(u_n)-f(\alpha_3)|$

بما أن f قابلة للإشتقاق على I و بما أن كلا من u_n و α_3 عنصران من I فإنه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يو جد عنصر c_n ما بين u_n و α_3 بحيث :

$$f(u_n)-f(\alpha_3)=f'(c_n)(u_n-\alpha_n)$$

ومنه :

$$|u_{n+1}-\alpha_3|=|f'(c_n)|\,|u_n-\alpha_n|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_n|$$

لأن : $c_n\in I$

إذن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})|u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_n|}$

ج) بالترجع :

لأجل : $n=0$ يكفي أن نبين أن :

$$\left|\alpha_3-\frac{1}{3}\right|\le\frac{2}{3}$$

نعلم أن : $\frac{1}{3}<\alpha_3<\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه :

$$\left|\alpha_3-\frac{1}{3}\right|\le\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}<\frac{2}{3}$$ لأن : $\sqrt{3}<3$

نفترض أن : $|u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ لأجل $n\in\mathbb{N}$.

حسب نتيجة السؤال ب) أعلاه :

$$|u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|\le\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

ومنه : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

د) المتتالية الهندسية $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ تؤول إلى 0 لأن : $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ وحسب المتفاوتة أعلاه فإن:

$\boxed{\text{المتتالية } (u_n)_{n\ge0} \text{ متقاربة و } \lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha_3}$

(III)

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\quad F(x)=\int_x^{8x}f(t)dt$$

1) أ) الدالة f متصلة على $[0,+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية G على $[0,+\infty[$ ومنه :

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\quad F(x)=G(8x)-G(x)$$

إذن F كفرق مركبات دوال قابلة للإشتقاق تقبل الإشتقاق على $[0,+\infty[$.

ب) لدينا لكل x من $[0,+\infty[$:

$$F'(x)=8G'(8x)-G'(x)=8f(8x)-f(x)$$

أي : $F'(x)=16\sqrt[3]{x}\,e^{-8x}-\sqrt[3]{x}e^{-x}=\sqrt[3]{x}e^{-x}\left(16e^{-7x}-1\right)$

$$\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\ F'(x)=\sqrt[3]{x}\ e^{-x}\left(16e^{-7x}-1\right)$$

ومنه :

$$\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\ F'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=\frac{4\ln(2)}{7}$$

$$\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\ F'(x)>0\Leftrightarrow 16e^{-7x}>1\Leftrightarrow x<\frac{4\ln(2)}{7}$$

ومنه تغيرات F :

× F تزايدية قطعا على : $\left[0,\frac{4\ln 2}{7}\right]$

× F تناقصية قطعا على : $\left[\frac{4\ln 2}{7},+\infty\right[$

× $F\left(\frac{4\ln 2}{7}\right)$ قيمة قصوى مطلقة للدالة F.

2) أ) ليكن : $x\in\mathbb{R}^+$. لدينا : $x\le 8x$ ومنه :

$$(\forall t\in[x,8x])\ \sqrt[3]{t}\le\sqrt[3]{8x}=2\sqrt[3]{x}$$

إذن : $F(x)=\int_x^{8x}\sqrt[3]{t}\,e^{-t}dt\le 2\sqrt[3]{x}\int_x^{8x}e^{-t}dt$

$$=2\sqrt[3]{x}\left[-e^{-t}\right]_x^{8x}=2\sqrt[3]{x}\left(e^{-x}-e^{-8x}\right)$$

$$=2\sqrt[3]{x}\,e^{-x}(1-e^{-7x})=2f(x)(1-e^{-7x})$$

وبما أن $f\ge 0$ على $[x,8x]$ فإن : $F(x)\ge 0$ ومنه :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ 0\le F(x)\le 2f(x)(1-e^{-7x})}$$

ب) نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-7x})=1$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(2f(x)(1-e^{-7x})\right)=0$ وحسب المتفاوتة المزدوجة

أعلاه فإن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}$

ج) جدول التغيرات للدالة F :

x	0	$\frac{4\ln 2}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$	$+$		$-$
$F(x)$	$0 \nearrow$	$F\left(\frac{4\ln 2}{7}\right)$	$\searrow 0$