

1/3	الصفحة	الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا دورة يونيو 2006
4 ساعات	مدة الإنجاز	
10	المعامل	المادة : الرياضيات الشعبة : علوم رياضية مؤسسة الأزرق الخاصة: E.S.L./ ثانوية: ام ايمن- نيابة فاس.

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير القابلة للبرمجة

سلم
التقيط

- التمرين الأول:** ليكن θ ينتمي على المجال $]0, \pi[$.
- (1) حل في \mathbb{C} المعادلة $E: z^2 - 2z \sin \theta + 2(1 + \cos \theta) = 0$ (نرمز ب z_1 و z_2 الحلين بحيث: $\text{Im}(z_1) \geq \text{Im}(z_2)$. 0,5
- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- (2) أ- اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . 0,5
- ب- حدد قيم θ لكي يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع حيث $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ 0,25
- (3) لتكن M لحقها z ، نرجح النقطتين $(M_1, 1)$ و $(M_2, 3)$.
- أ- بين أن : $z = \sin \theta - 2i(1 + \cos \theta)$. 0,25
- ب- لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : θ يتغير في المجال $]0, \pi[$. 0,75
- بين أن : (Γ) جزء من مخروطي يجب تحديد طبيعته وعناصره المميزة، ثم أنشئ (Γ) في المعلم (O, \vec{u}, \vec{v})
- التمرين الثاني :** (السؤالان 1 و 2 مستقلان)
- (1) أ- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $5x - 11y = 4$ 0,5
- ب- حل في \mathbb{Z} النظام :
$$\begin{cases} 3z \equiv 1[5] \\ 7z \equiv 9[11] \end{cases}$$
 0,5
- (2) أ- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . حدد حسب قيم n باقي القسمة الإقليدية للعدد 12^n على 5 . 0,25
- ب- نعتبر نظام العد ذي الأساس 12 الأرقام : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta$ 0,5
- حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $4\beta 32\alpha 5^{(12)}$ على 5 .
- التمرين الثالث :** للوصول إلى محطة القطار ، يقطع سائق سيارة أجرة عدة إشارات للمرور . لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر E_n الحدث : " السائق صادف الضوء الأحمر والأصفر في الملتقى n " نضع : $p_n = p(E_n)$ و $q_n = p(\bar{E}_n)$
- نفترض أن احتمال أن يكون الضوء أحمر أو أصفر في الملتقى الأول هو $\frac{1}{8}$. واحتمال لكي يصادف السائق الضوء الأحمر أو الأصفر في الملتقى $n+1$ إذا كان الضوء أحمر أو أصفر في الملتقى n هو $\frac{1}{20}$ واحتمال أن يصادف الضوء الأحمر أو الأصفر في الملتقى $n+1$ إذا كان الضوء أخضر في الملتقى n هو $\frac{9}{20}$.
- (1) احسب $p_{E_n}(E_{n+1})$ و $p_{\bar{E}_n}(E_{n+1})$. 0,5
- (2) بين أن $p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} q_n$ ثم استنتج p_{n+1} بدلالة p_n . 0,5
- (3) لكل n من \mathbb{N}^* نضع $v_n = 28p_n - 9$. 0,25
- أ) بين أن $(v_n)_{n \geq 1}$ هندسية محددنا أساسها وحدها الأول v_1 . 0,5
- ب) حدد p_n بدلالة n . 0,5
- ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ واعط تأويلا لهذه النتيجة . 0,5

التمرين الرابع: نعرف في \mathbb{R}^2 قانوني التركيب الداخلية + و \times كما يلي : لكل (a,b) و (a',b')

من \mathbb{R}^2 :

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b) * (a',b') = (aa', b(a'-b') + b'(a-b))$$

(1) تحقق من أن $(\mathbb{R}^2, +)$ زمرة تبادلية .

(2) أ - بين أن * تبادلي .

ب- بين أن $(\mathbb{R}^2, +, *)$ حلقة واحدة تبادلية وحدتها $(1,0)$.

ج- حدد U مجموعة العناصر (a,b) التي تقبل ماثلا في $(\mathbb{R}^2, *)$.

د- هل $(U, +, *)$ جسم ؟ علل جوابك ؟

(3) نعرف التطبيق φ من \mathbb{R}^2 نحو $M_3(\mathbb{R})$ بما يلي :

$$\varphi((a,b)) = M(a,b) = \begin{pmatrix} a-b & -b & 0 \\ -b & a-b & 0 \\ -b & b & a-2b \end{pmatrix}$$

أ- بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^2, +)$ نحو $(M_3(\mathbb{R}), +)$ ومن $(\mathbb{R}^2, *)$ نحو $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

ب- استنتج بنية $(\varphi(\mathbb{R}^2), +, \times)$.

(4) نضع لكل t من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ولكل n من \mathbb{N}^* : $A(t) = M(1,t)$ و $(A(t))^n = A(t_n)$

أ- بين أن $A(t)$ يقبل مقلوبا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ وحدد $(A(t))^{-1}$.

ب- حدد علاقة ترجعية بين t_n و t_{n+1} .

ج- حدد t_n بدلالة n و t واستنتج المصفوفة $(A(t))^n$ بدلالة t و n .

الجزء الأول :

مسألة :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{\ln x}, x \in]0,1[\\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :

(1) بين أن f متصلة على اليمين في 0 وعلى اليسار في 1 .

(2) لتكن الدالة u المعرفة على $]0,1[$ بما يلي : $u(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$

ادرس تغيرات الدالة u ثم استنتج إشارة $u(x)$ على المجال $]0,1[$.

(3) لكل x من $]0,1[$ ، احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

(4) ادرس اشتقاق f على اليمين في 0 ثم اعط تأويلا هندسيا .

(5) أ- بين أنه لكل x من $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $0 \leq \frac{1}{1-x} - (1+x) \leq 2x^2$

ب- استنتج أنه لكل t من $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $0 \leq -\ln(1-t) - (t + \frac{t^2}{2}) \leq \frac{2t^3}{3}$

(6) لتكن الدالة g المعرفة على $]0,1[$ بما يلي : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

0 ≤ g(1+h) - g(1) + $\frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$: $[-\frac{1}{2}, 0]$ من h لكل $0,5$

ب- استنتج أن g قابلة للاشتقاق في 1 على اليسار وحدد $g'_g(1)$. $0,5$

ج- بين أن : $f'_g(1) = \frac{1}{2}$ $0,5$

(7) ارسم C_f ($\|i\| = \|j\| = 4cm$) . $0,5$

الجزء الثاني :

نضع : $I = \int_0^1 f(t).dt$ و لكل x من $]0,1[$: $I(x) = \int_x^1 f(t).dt$ و $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}.dt$

لتكن الدالة F المعرفة على $]0,1[$ بما يلي : $F(x) = J(x^2) - J(x)$

(1) بين أن لكل x من $]0,1[$: $F'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - 2f(x^2))$ $0,5$

(2) تحقق أن لكل x من $]0,1[$: $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$ $0,5$

(3) استنتج أن لكل x من $]0,1[$: $I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t \ln t}.dt$ $0,5$

(4) بين أن : $\int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln t}.dt = -\ln 2$ $0,25$

(5) أ- بين أن لكل x من $]0,1[$: $\left| \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t} \right| < \frac{-x}{\ln x}$ $0,5$

ب- استنتج مما سبق : $\lim_{x \rightarrow 0^+} I(x)$ $0,5$

(6) أ- تحقق أن لكل x من $]0,1[$: $I - I(x) = \int_0^x f(t).dt$ $0,5$

ب- استنتج أن : $0 < I - I(x) \leq x$ $0,5$

(7) بين أن : $I = \ln 2$ $0,5$

انتهى