المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
لجهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة عمالة مقاطعة أنفا
مجموعة مدارس ياسمين
البيضاء

الإمتحان التجريبي الموحد

المستوى : الثانية ثانوي من سلك البكالوريا

الشعبة : علوم رياضية (أ) و (ب)

المدة الزمنية : 4 ساعات

التمرين❶ : (3.25 نقطة)

يحتوي صندوق على 10 كرات سوداء و10 كرات بيضاء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق, إذا كانت سوداء نعيدها إلى الصندوق وإذا كانت بيضاء نعوضها بكرتين سوداوين من خارج الصندوق
ثم نسحب عشوائيا مرة ثانية كرة واحدة من الصندوق .

1) حدد احتمال الأحداث التالية :
أ- الحصول على كرتين بيضاوين .**(0.75 ن)**
ب – الحصول على كرتين سوداوين . **(0.75 ن)**
ج – الحصول على كرتين مختلفتي اللون . **(0.75 ن)**

2) حدد احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة سوداء . **(1 ن)**

التمرين❷ : (3.75 نقطة)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \quad , \quad u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

1) حل المعادلة المميزة ثم استنتج أن $u_n = 2^n + 3^n$ لكل n من $\mathbb{N}$. **(0.5)**

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. **(0.5)**

3) أ – ادرس بواقي القسمة الأقليدية للأعداد 2^n و 3^n على 5 . **(0.5)**
ب – استنتج حلول المعادلة $u_n \equiv 0[5]$, $n \in \mathbb{N}$. **(0.5)**

4) بين أن u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما لكل n من $\mathbb{N}$. **(0.5)**

5) أ - تحقق من أن u_m لا يكتب على الشكل b^α (حيث b و α عددان صحيحان طبيعيان , $\alpha \geq 2$) في الحالتين التاليتين
- $m = 1$ **(0.25 ن)**
- $m = 3$. **(0.25 ن)**

6) نفترض أن m عدد صحيح طبيعي فردي وأولي مع 5 .
أ – بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $u_m = 5S_k$ حيث
$S_k = 2^{2k} + 2^{2k-1}(-3) + 2^{2k-2}(-3)^2 + \cdots\cdots + 2(-3)^{2k-1} + (-3)^{2k}$ (يمكن استعمال تعميل $2^{2k+1} + 3^{2k+1}$) **(0.25 ن)**
ب - بين أن $S_k \equiv m2^{m-1}[5]$. **(0.25 ن)**
ج - استنتج أن S_k لا يقبل القسمة على 5 . **(0.25 ن)**

التمرين❸ : (5 نقط)

لكل عدد عقدي z نضع $P(z) = 2iz^3 + 2(2-i)z^2 - (3+2i)z + i$.

1) أ – أوجد العدد الحقيقي b بحيث $P(bi) = 0$. **(0.5 ن)**
ب – تحقق أن $P(z) = (z - bi)Q(z)$ حيث $Q(z) = \left((1+i)z - i\right)^2$. **(0.5 ن)**

2) نعتبر المعادلة : (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - \left(m - i(m+1)\right)z - im^2 - m = 0$ حيث m بارمتر عقدي .
أ – بين أن مميز المعادلة (E) هو $Q(m)$. **(0.5 ن)**
ب – حدد الجذرين z' و z'' للمعادلة (E) علما أن $|z'| = |m|$.**(0.5 ن)**

3) نضع $m = 2\cos\theta + i\sin\theta$ حيث $\theta \in [0,\pi]$ ونعتبر المجموعة $(C) = \{M(z'') \mid \theta \in [0,\pi]\}$
أ – بين أن (C) جزء من إهليلج ينبغي تحديد معادلته ورؤوسه في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.**(0.75 ن)**

ب – أنشىء (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.(0.5 ن)

4) نضع $m=\dfrac{2}{\cos\theta}+3i\tan\theta$ حيث $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}[$ ونعتبر المجموعة $(C')=\left\{M(z')\,|\,\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}[\right\}$.

أ – بين أن (C') جزء من هذلول (H) ينبغي تحديد معادلته ورأسيه ومقاربيه في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.(1 ن)

ب – أنشىء (H) و (C') في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (0.75 ن)

التمرين④ : (5 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x}\ ,\ x<0 \\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\ ,\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1) أ – بين أن f متصلة على اليسار عند النقطة 0 .(0.25 ن)

ب ـ ادرس اتصال f على اليمين عند النقطة 0 . (0.25 ن)

2) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار عند النقطة 0 . (0.25 ن)

II) 1) أ - أثبت أن : $(2x^2-1)e^{x^2}+1>0$ $(\forall x\in\mathbb{R}_-^*)$ (0.75 ن)

ب - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty,0]$.(0.75 ن)

2) أ - بين أن $\dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)$ $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$. (0.5 ن)

ب - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (1 ن)

3) أ – اعط جدول تغيرات الدالة f .(0.5 ن)

ب – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).(0.75 ن)

ج – أنشيء المنحنى (C_f) . (0.5 ن)

4) ليكن λ عددا حقيقيا من المجال $[1,+\infty[$.

أ – أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للجزء من المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=\lambda$.(1 ن)

ب – أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.(0.25 ن)

التمرين⑤ : (3 نقط)

نعتبر المجموعة التالية $E=\left\{M_{(n)}=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ n2^n & 2^n\end{pmatrix}\,|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

1) نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي : $\begin{array}{l} f:\ \mathbb{Z}\to E \\ \quad n\mapsto M_{(n)}\end{array}$

أ – بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},+)$ نحو $(E,\times)$.(0.5 ن)

ب – استنتج بنية $(E,\times)$.(0.5 ن)

2) حدد بدلالة n و p المصفوفة $\left(M_{(n)}\right)^p$ حيث $p\in\mathbb{Z}$.(0.5 ن)

3) ليكن (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المجموعة التالية $F=\left\{M_{(a)}^p\times M_{(b)}^q\,|\,(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

أ – بين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية من $(F,\times)$ (0.5 ن)

ب – ليكن c من $\mathbb{Z}$ بين أن : $M_{(c)}\in F\Leftrightarrow a\wedge b\,|\,c$.(0.5 ن)

ج – استنتج أن : $E=F\Leftrightarrow a\wedge b=1$ (0.5 ن)