نيابة الفداء درب السلطان ومشور الدار البيضاء
ثانوية مجموعة مدارس الإقامة
شعبة العلوم الرياضية
المستوى: 2 سلك البكالوريا

الفرض الموحد في مادة الرياضيات
الدورة الثانية (2003 – 2004)
مدة الإنجاز : 4 ساعات

التمرين الأول (6 نقط)

لتكن المجموعة E للأزواج (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $a \neq -1$ ونعتبر التطبيق :

$$f_{(a,b)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$Z=x+iy \mapsto Z'=x'+iy' \ / \begin{cases} x'=(1+a)x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

والمجموعة $A=\left\{f_{(a,b)} \ / (a,b)\in E\right\}$

① أ) تحقق أن $\forall (a,b)\in E \ \forall (a',b')\in E \quad f_{(a',b')}\circ f_{(a,b)} = f_{(a+a'+aa',b+b')}$ ثم استنتج أن $\circ$ قانون تركيب داخلي في المجموعة A . 1

ب) بين أنه لكل (a,b) من E , التطبيق $f_{(a,b)}$ تقابلي وتحقق أن $f^{-1}_{(a,b)} = f_{\left(\frac{-a}{1+a},-b\right)}$ 0.75

ج) بين أن $(A,\circ)$ زمرة تبادلية . 1

② نعرف في E قانون التركيب الداخلي T بحيث $\forall (a,b)\in E \ \forall (a',b')\in E \quad (a,b)\mathrm{T}(a',b')=(a+a'+aa',b+b')$

ونعتبر التطبيق :
$$h : A \to E$$
$$f_{(a,b)} \mapsto (a,b)$$

أ) بين أن h تشاكل تقابلي من $(A,\circ)$ نحو (E,T) 1

ب) استنتج بنية (E,T) . 0.5

ج) حدد العنصر المحايد ومماثل كل عنصر (a,b) في (E,T) 0.5

د) لتكن المجموعة : $H=\left\{ (x,\ln(x+1)) \ / \ x>-1 \right\}$. بين أن (H,T) زمرة جزئية من الزمرة (E,T) 1.25

التمرين الثاني (9.75 نقطة)

(I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2$ و (C_f) هو منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

① أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما . 0.75

ب) ادرس تغيرات الدالة f . 1

ج) بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يتم تحديد أفصول كل منهما . 0.75

د) ارسم المنحنى (C_f) (نعطي $e^2=7,4$ و $\frac{4}{e^2}=0,6$) 1

② احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) ومحور الأفاصيل وبالمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e^2$ 0.5

(II) ليكن $p\in\mathbb{N}^*$ ونضع : $I_p=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}\,dx$ 0.5

① احسب التكلمل I_1 1

② أ) بين أن : $\forall p\in\mathbb{N}^* \quad I_{p+1}=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p$ 0.75

ب) استنتج قيمة كل من I_2 و I_3 و I_4 0.25

ج) أعط تأويلا هندسيا للعدد πI_4

(III) نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $F(x)=\int_{\ln x}^{1+\ln x} f(t)\,dt$ 0.25

① تحقق أن F معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ 0.75

② ليكن x من I . بين أن $\exists X\in[\ln x, 1+\ln x] \ F(x)=f(X)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

③ ليكن $0 < \alpha < 1$ ونضع : $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} f(t)\,dt$ احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم استنتج النهاية $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ إذا علمت أن $\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$	0.75
④ بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال I ثم احسب $F'(x)$ لكل x من I	0.75
⑤ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \int_{1}^{1+\frac{1}{n}} f(nt)\,dt$ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \frac{1}{n}\int_{n}^{n+1} f(T)\,dT$ ثم استنتج أن $u_n = \frac{F(e^n)}{n}$ واحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$	0.75
التمرين الثالث	(4.25 نقطة)
نعتبر صندوقا يحتوي على 6 كرات من بينها : – أربع كرات خضراء مرقمة 0, 1, 1, 2 – كرتين لونهما أحمر مرقمتين 1, 2 ① نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال . أ) احسب احتمال كل من الأحداث التالية :	
A " الكرات المسحوبة لها نفس اللون أونفس الرقم "	0.75
B " من بين الكرات المسحوبة توجد فقط كرتين لهما نفس اللون "	0.75
C " مجموع الأرقام المحصل عليها يساوي 3 "	0.75
ب) علما أن الكرة المحصل عليها في السحبة الأولى تحمل الرقم 0 فما هو الاحتمال أن تكون الثانية والثالثة لهما نفس الرقم ؟	1
② ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نسحب بالتتابع وبإحلال n كرة من الصندوق . ما هو الاحتمال P_n للحصول على كرة خضراء مرة واحدة ؟ احسب $\lim_{n \to +\infty} P_n$	1

ملحوظة : يراعى في عملية تصحيح الأوراق ، الدقة والوضوح في تعليل الأجوبة،

وكذلك العناية في تقديم ورقة التحرير .