الأكاديمية الجهوية للدار البيضاء الكبرى
نيابة البيضاء انفا
الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله

الامتحان التجريبي
السنة الثانية علوم رياضية

26 أبريل 2006
المادة: الرياضيات

التمرين الأول: (3,5 ن)

المستوى P منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر التطبيق:

$$\varphi : P \longrightarrow P$$
$$M(z) \longmapsto M'(z')$$

بحيث: $z'=(1+i)z-i$.

1) أ- بين أن التطبيق φ يقبل نقطة صامدة وحيدة A	0,5
ب- أثبت أن: $AM'=\sqrt{2}AM$ و $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ وأن المثلث AMM' قائم الزاوية	1
2) أ- أوجد في المجموعة $\mathbb{C}$ z_1 و z_2 حلي المعادلة: $z'=\frac{1}{z}$	0,5
ب- أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(z_1+z_2)^{2006}$.	0,5
3) ليكن θ من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ ، نضع $z=\tan(\theta)+i\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$	
أ- تحقق أن $M(z)$ تتغير على جزء من هذلول (H) يتم تحديد معادلة له.	0,5
ب- بين أن $M'(z')$ تنتمي إلى جزء من هذلول (H') محدد معادلة له، ثم إنشاؤه.	0,5

التمرين الثاني: (5,5 ن)

I) لتكن f دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$ ولتكن u و v دالتين عدديتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و G دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$

1) أثبت أن G قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$	0,5
2) تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R}),\ G'(x)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$	0,5

II) لتكن f و F دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x^4e^{-4x^4} \quad \text{و} \quad F(x)=\int_{x}^{1+x^2}f(t)\,dt$$

1) أ- حدد المجال D_E لدراسة f وجدول تغيرات f على D_E.	0,75
ب- إستنتج أن: $(\forall x\in\mathbb{R}),\ f(x)\leq\frac{1}{4e}$	0,25
2) أ- أحسب الدالة المشتقة F'	0,5
ب- إستنتج أن: $(\forall x\in[0,1])\quad |F'(x)|\leq\frac{3}{4e}$	0,5
3) بين أن: $(\forall x\in[0,1])\quad 0\leq F(x)<1$	0,5
4) أثبت أنه يوجد x_0 من المجال $]0,1[$ بحيث $F(x_0)=x_0$	0,5

5) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أثبت أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in [0,1]$ 0,5

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad |u_{n+1}-x_0| \leq \frac{3}{4e}|u_n - x_0|$ 0,5

ج- إستنتج أن (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها. 0,5

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$

1) أدرس تغيرات f 1,5

2) أنشئ (C_f) منحنى f في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ 0,5

3) ليكن p من $\mathbb{N}^*$ و $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln(x))^p}{x^2}dx$

أ- أثبت أن : $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1) I_p$ ، $(\forall p\in\mathbb{N}^*)$ 0,75

ب- أحسب I_1 ; I_2 ; I_3 و I_4 1,25

ج- ليكن g قصور f على $[1,e^2]$، أحسب حجم المجسم المولد بدوران (C_g) حول محور الأفاصيل. 0,5

التمرين الرابع : (3,5 ن)

1) أ- تحقق أنه اذا كان r عددا موجبا أصغر من 24 وأوليا مع 24 فإن $r^2 \equiv 1[24]$ 0,5

ب- إستنتج أنه إذا كان a عددا نسبيا أوليا مع 24 فإن $a^2\equiv 1[24]$ 0,5

2) ليكن a و b عددين نسبيين بحيث $ab \equiv -1[24]$ 1

تحقق أن $a\wedge 24 = b\wedge 24 = 1$ ثم استنتج أن $a+b\equiv 0[24]$

3) ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم قابلا للقسمة على 24

أ- بين أنه مهما يكن العدد النسبي m لدينا : $m^2\equiv 0[3]$ أو $m^2\equiv 1[3]$ 0,5

ب- إستنتج أن $n-1$ ليس بمربع كامل 0,5

ج- بين أن مجموع القواسم الموجبة لـ $n-1$ يقبل القسمة على 24 0,5

التمرين الخامس : (4 ن)

نعتبر في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ الجزء : $E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

1) بين أن E جزء مستقر في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ واستنتج بنية $(E,+)$ 0,75

2) أثبت أن E مستقر في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ 0,5

3) نعتبر التطبيق :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M_{(a,b)} & \longmapsto & a+b+ib \end{array}$$

أثبت أن f تشاكل تقابلي من $(E,+)$ الى $(\mathbb{C},+)$ ومن $(E,\times)$ الى $(\mathbb{C},\times)$ واستنتج بنية $(E,+,\times)$ 1,5

4) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 - 2 + 2i = 0$ واستنتج حلول المعادلة : $(M_{(a,b)})^3 = M_{(4,-2)}$; $M_{(a,b)}\in E$ 1,25

يؤخذ بعين الاعتبار الدقة في البراهين وصياغة الحلول.