ALMADARIS ALHASSANIA	SIMILI N°3	2SM-A/B	05/06

PROBLEME :9 pts

MERCREDI : 3/05/06
DUREE :4h

A نضع : $\boxed{\forall x \in \left]0;+\infty\right[: g(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2 \quad ; \quad g(0) = -1}$:

1) **0.5** بين أن الدالة g متصلة عن يمين 0 (ضع : $t^2 = x$) .

2) **0.25** ادرس قابلية اشتقاق g في 0.

3) 0.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

4) **0.25** ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة g .

5) **0.75** احسب $g'(x)$ لكل x في المجال $\left]0;+\infty\right[$ وتحقق من أن $g'(1) = 0$.

6) **0.5** احسب $g''(x)$ وبين أن إشارتها على المجال $\left]0;+\infty\right[$ هي إشارة $1 - x + \ln x$. (نذكر أن : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[: \ln x \le x - 1$).

7) **0.25** استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

8) **0.25** أنشئ جدول تغيرات الدالة g .

9) **0.5** أنشئ منحنى الدالة g في معلم متعامد ممنظم .

10) ليكن α من المجال $\left]0;1\right[$. نضع : $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x(\ln x)^2 dx$.

a) **0.75** بين أن: $I(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{1}{4}$.

b) **0.5** $A(\alpha)$ هي مساحة الحيز المحصور بين منحنى g والمستقيمات : $x = \alpha ; x = 1 ; y = 0$ بين أن : $\lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha) = \dfrac{1}{12}$

B

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بمايلي : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} ; si ; x \ne 1 \qquad f(1) = \dfrac{1}{2}}$

1) **0.5** بين أن الدالة f متصلة عن يمين 1. (استعمل : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+h) - h}{h^2} = -\dfrac{1}{2}$)

2) **0.5** تحقق من أن : $\forall x > 1 : f(x) = 1 - f(\dfrac{1}{x})$ واستنتج أن f متصلة عن يسار 1.

3) **0.25** بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\left]1;+\infty\right[\cup \left]0;1\right[$.

4) **0.5** أنشئ جدول تغيرات الدالة f . (نقبل أن f غير قابلة للاشتقاق في 1)

5) **0.25** واستنتج أن: $\forall x \ge 1 : 0 \le f(x) \le \dfrac{1}{2}$.

C

نضع : $\boxed{F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt}$

1) 0.25 تحقق من أن F معرفة وقابلة للاشتقاق على: $\left]0;+\infty\right[$.

2) **0.5** بين أن $\forall x \succ 1; \quad F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} - \dfrac{1}{x+1}$

3) **0.25** استنتج رتابة F على $\left[1;+\infty\right[$ (يمكن استعمال : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[: \ln x \le x - 1$).

4) **0.75** بين أن: $\forall x \succ 1 : \int_x^{x^2} \dfrac{1}{\ln t} dt \ge \dfrac{x^2 - x}{\ln(x^2)}$ وأن : $F(x) \ge -\ln(1+x) + \dfrac{x^2 - x}{\ln(x^2)}$.

5) 0.25 استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

ALMADARIS ALHASSANIA	SIMILN°3	2SM-A/B	05/06

EXERCICE2 : 3.5pts

نضع : $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} / \alpha \in IR \right\}$

1) **0.5** بين أن E جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $M_3(IR)$.

2) 0.75 نضع : $U = \{z \in C \; ; \; |z| = 1\}$. بين أن $(U;\times)$ زمرة جزئية من $(C^*;\times)$.

MERCREDI : 3/05/06
DUREE :4h

3) نعتبر التطبيق φ المعرف كما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi : U \to E \\ e^{i\alpha} = z \to \varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{array}}$$

a) **1.25** بين أن φ تشاكل تقابلي من إلى $(U;\times)$ نحو $(E;\times)$. واستنتج أن $(E;\times)$ زمرة تبادلية .

b) 0.5 احسب : M^{-1} و M^n لكل M من E و n من IN^*.

c) 0.5 هل $(E;+)$ زمرة جزئية من $(M_3(IR);+)$؟ علل جوابك.

EXERCICE4 : 3.75pts

$\boxed{A}$ ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث : $n \geq 4$ نعتبر في IN المعادلة ذات المجهول a بحيث :

$$\boxed{a^2 + 9 = 2^n} \quad (1)$$

.1

a) **0.5** بين انه إذا a حلا للمعادلة (1) فإن a فردي.

b) **0.5** باعتبار الموافقة بترديد 4 بين أن المعادلة (1) مستحيلة .

.2 نعتبر في IN المعادلة ذات المجهول a بحيث : $\boxed{a^2 + 9 = 3^n}$ $n \geq 3$ (2).

a) **0.75** بين أن : $\forall n \in IN; et; n \geq 3; on; a : 3^n \equiv 1[4]; ou; 3^n \equiv 3[4];$.

b) **0.5** استنتج أنه إذا كان a حلا للمعادلة فإن a زوجي ثم استنتج أن n زوجي .

c) **0.5** نضع : $n = 2p$ بحيث $p \in IN - \{0;1\}$ باعتبار تعميل $3^n - a^2$ بين أن (2) مستحيلة .

$\boxed{B}$ ليكن b عدد صحيح طبيعي اكبر قطعا من 3 .

.1 **0.5** بين أن: $b+1$ و $b+2$ تقسمان العدد $\overline{132}_{(b)}$.

2 . **0.5** حدد: $\overline{1320}_{(b)} \wedge \overline{1430}_{(b)}$ بدلالة b.

NB : $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$ sont indépendantes

EXERCICE1 : 3.75 pts

نعتبر في C المعادلة : $\boxed{(E) : z^2 - \dfrac{4}{\sin\theta} z + \dfrac{13}{\sin^2\theta} - 9 = 0}$ و $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

1) **1** حل في C المعادلة (E).

2) نعتبر النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ حيث z_1 و z_2 هما حلول المعادلة (E) $(\operatorname{Im}(z_1) > 0)$ ونعتبر الدوران $R(O;\dfrac{\pi}{2})$.

a) **0.75** بين أن: أن صورة النقطة $M_1(z_1)$ بالدوران $R(O;\dfrac{\pi}{2})$ هي النقطة $M_3(\dfrac{2i}{\sin\theta} - 3\cot an\theta)$.

b) **1** بين أن $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ تتغيران على مخروطي (H) يجب تحديد معادلة مختصرة له.

c) **1** حدد العناصر المميزة للمخروطي (H) و أنشئه.