ثانوية ابن الهيثم -فاس	امتحان تجريبي أبريل 2006	بسم الله الرحمان الرحيم

4 ساعات	مدة الإنجاز	المادة :الرياضيات	سلم التنقيط
10	المعامل	الشعبة : العلوم الرياضية	

7 ن

التمرين الأول:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب :

$$g(x)=\ln|x-2|-\frac{x-1}{x-2}$$

1-ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ و اعط جدول تغيراتها – سنحدد كلا من $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to 2} g(x)$

2-بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2;+\infty[$ وأن $\alpha\in]4;6[$

3-استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة ب

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln|x-2|};x\neq 1;x\neq 2 \\ f(1)=-1;f(2)=0 \end{cases}$$

1- حدد مجموعة تعريف الدالة f

2- ادرس اتصال f في كل من 1و2

3- أ- بين أن :

$$\forall t\in]0;+\infty[\quad : \quad t-\frac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$$

ب- استنتج أن :

$$\forall x\in]0;1[\quad : \quad \frac{1-x}{2}-\frac{(1-x)^2}{3}\leq\frac{x-1+\ln(2-x)}{x-1}\leq\frac{1-x}{2}$$

ج- احسب: $\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{\ln(2-x)}$ و استنتج قابلية اشتقاق f على اليسار في 1 و احسب $f'_g(1)$

(سنقبل أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و أن : $f'_d(1)=\frac{1}{2}$) أعط تأويلا هندسيا للنتائج.

د- ادرس قابلية اشتقاق f في 2 و أول هندسيا النتائج.

4-ادرس قابلية اشتقاق f على D_f و احسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

5-أ-حدد الفروع اللانهائية للمنحنى C_f.

ب- بين أن : $f(\alpha)=\alpha-2$ و أنشئ C_f منحنى f (سنأخذ $\alpha=5,6$ و $f(\alpha)=3,6$)

الجزء الثالث:

لتكن h قصور f على المجال $[\alpha;+\infty[$ ، بين أن h تقابل من $[\alpha;+\infty[$ نحو مجال حدده و أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة h^{-1}

4 ن

التمرين الثاني:

I) ليكن N عددا صحيحا طبيعيا فرديا و غير أولي و نفترض أن $N = a^2 - b^2$ حيث a و b عددان صحيحان طبيعيان

1-بين أن ليس ل a و b نفس الزوجية

2- بين أنه يمكن كتابة N على شكل جداء عددين صحيحين طبيعيين p و q .

3-حدد زوجية كل من p و q .

II) نفترض أن العدد 250507 ليس أوليا و سنحدد الأزواج (a, b) التي تحقق العلاقة (E)

$$(E) \quad : \quad a^2 - 250507 = b^2$$

1- ليكن X عددا صحيحا طبيعيا

أ- اعط في جدول بواقي قسمة X و X^2 بترديد 9

ب- علما أن $a^2 - 250507 = b^2$ ، حدد البواقي الممكنة على9 ل $a^2 - 250507$ ، و استنتج البواقي الممكنة على9 للعدد a^2 .

ج- بين أن البواقي الممكنة ل a على 9 هي 1 و8 .

2- تحقق أنه إذا كان الزوج (a, b) يحقق العلاقة (E)، فإن $a \geq 501$. وبين أنه لا يوجد حل من النوع : $(501، b)$

3-نفترض أن الزوج (a, b) يحقق العلاقة (E)

أ- بين أن : $a \equiv 503[9]$ أو $a \equiv 505[9]$

ب- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث يكون الزوج $(505+9k; b)$ حلا ل (E)، و أعط الحل الموافق له.

III)1- استنتج من الأسئلة السابقة كتابة ل 250507 على شكل جداء عددين صحيحين طبيعيين u و v.

2- هل العددان u و v أوليان فيما بينهما؟هل العددان u و v أوليان؟

3- هل الكتابة : 250507=uv وحيدة ؟

3 ن

التمرين الثالث:

لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$ نعرف التكامل $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$

1- احسب I_1

2- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$: $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$

3- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$: $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n$

5- نضع لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$: $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$

أ- بين أن لكل $n \geq 3$: $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

ب-استنتج أن لكل $n \geq 3$: $0 \leq U_n \leq U_3 (\frac{1}{2})^{n-3}$

6- استنتج $\lim_{n \to +\infty} U_n$ ثم $\lim_{n \to +\infty} I_n$

7-تحقق أن : $e^2 = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!})$

3ن

التمرين الرابع:

نعتبر صندوقين A و B الصندوق A يشتمل على كرتين بيضاوين ، و الصندوق B يشتمل على كرتين سوداوين غير قابلة للتمييز باللمس .

نعتبر الاختبار التالي المكون من مرحلتين :

- المرحلة الأولى : نسحب عشوائيا كرة من A وكرة من B .
- المرحلة الثانية : نضع الكرة المسحوبة من A في B و الكرة المسحوبة من B في A .

نعتبر الأحداث التالية :

* A_n : بعد الاختبار رقم n ، A لا تشتمل على أي كرة بيضاء * B_n : بعد الاختبار رقم n ، A تشتمل على كرة بيضاء واحدة * C_n : بعد الاختبار رقم n ، A تشتمل على كرتين بيضاوين نضع $a_n = p(A_n)$ و $b_n = p(B_n)$ و $c_n = p(C_n)$ 1- احسب $a_1;b_1;c_1$ 2- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n + b_n + c_n = 1$ 3- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم أ- بين أن : $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$ و $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$ ب- استنتج أن : $b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}b_n$ 4- نضع : $X_n = b_n - \frac{2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ أ- بين أن المتتالية (X_n) هندسية .حدد أساسها و حدها الأول ب-استنتج أن $b_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ج- استنتج أن $a_n = c_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ د- حدد أصغر قيمة ل n بحيث يكون $a_n \geq 0,95$ **<u>التمرين الخامس</u>**: في المستوى العقدي المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط $A(a);B(b);C(c)$ حيث $a = 2;b = 1-i;c = 1+i$ 1- أ- أنشئ شكلا ت- احسب العدد $\frac{c-a}{b-a}$ ، و استنتج أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين 2- أ- ليكن r الدوران الذي مركزه A و يحقق $r(B) = C$ حدد زاوية الدوران r و احسب d لحق النقطة $D = r(C)$ ب - لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها $[BC]$ ج- حدد وأنشئ Γ' صورة Γ بالدوران r 3- لتكن $M(z)$ نقطة من Γ مخالفة ل C و $M'(z')$ صورتها ب r أ- بين أن $M(z) \in \Gamma \Leftrightarrow \|z-1\| = 1$ ب- استنتج أن : $\exists \theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};2\pi\right[/ z = 1 + e^{i\theta}$ ج- بين أن : $z' = -ie^{i\theta} + i + 2$ د- تحقق أن : $e^{i\theta} - i = e^{-i\theta} + i$ و بين أن $\frac{z'-c}{z-c} = \frac{2\cos\theta}{\|e^{i\theta} - i\|^2}$ ثم استنتج أن $C;M$ و M' مستقيمية 4- ضع في الشكل النقطة $M(1+e^{i\frac{2\pi}{3}})$ و أنشئ صورتها M' ب r	3ن